Champ d'autocontrainte dans un cylindre

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un cylindre de révolution Ω de hauteur h et de rayon R constitué des points $\underline{x}$ tels que $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq z \leq h$ dans le repère $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. On suppose que les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans ce repère s'écrivent

$$\sigma_{xx} = -A\left(R^2 - x^2 - 3y^2\right), \quad \sigma_{xy} = -2\,A\,x\,y, \quad \sigma_{yy} = -A\left(R^2 - 3x^2 - y^2\right),$$
$$\text{et} \;\; \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma zz = 0.$$

1. Dans quelles unités s'exprime la constante A ? Sachant que le système est à l'équilibre, calculer les forces massiques $\underline{b}$.
2. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\underline{e}_r = (x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y)/r$ et $\underline{e}_\theta = (-y\,\underline{e}_x + x\,\underline{e}_y)/r$.
   Calculer $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_r$ et $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_\theta$. En déduire les composantes σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} et $\sigma_{\theta z}$ dans le repère $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.
3. Calculer les forces surfaciques $\underline{T}^d$ exercées sur le cylindre par son extérieur.
4. On suppose que $A > 0$ mesure l'intensité du serrage qui conduit à l'état d'autocontraintes décrit par le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Quelle est la valeur maximale de A lorsque le critère de rupture du matériau est gouverné par le critère de Tresca

   $$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0 \leq 0,$$

   où σ_0 est une constante caractéristique du matériau et σ_i et σ_j les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$?